Komplexe Zahlen

Addition
$$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$$

Subtraktion
$$(a + b\,\mathrm{i}) - (c + d\,\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i}$$

Multiplikation
$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathrm{i}$$

Division
$$\frac{a + b\,\mathrm{i}}{c + d\,\mathrm{i}} = \frac{(a + b\,\mathrm{i})(c - d\,\mathrm{i})}{(c + d\,\mathrm{i})(c - d\,\mathrm{i})} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot \mathrm{i}$$

Betrag: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Argument: $\varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$$(a + bi)^n = r^n(\cos(n * \varphi) + i * \sin(n * \varphi))$$

Komplexe Wurzel

$$z_k = r(cos\varphi_k + i * sin\varphi_k)$$

$$r = \sqrt[n]{|zahl\ unter\ wurzel|}$$

$$\varphi_k = \frac{k * 2\pi}{n}$$

n: Potenz

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Zerlegung in irreduzible reelle Polynomfaktoren

1. Komplexe Wurzel Ausrechnen
2. $(z - z_1) * (z - z_2) * (z - z_3) * \dots * (z - z_n)$

Logik

Regeln:

$$\wedge = *$$

$$ab = ba$$
$$a(b + c) = ab + bc$$
$$a \rightarrow b = \overline{a} + b$$
$$b + \overline{b}\overline{a} = b + \overline{a}$$

$$\vee = +$$

$$a + b = b + a$$
$$\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$$
$$a \rightarrow b = \overline{b} \rightarrow \overline{a}$$
$$a + \overline{a} = 1$$

Reihen

Konvergenz

Leibniz-Kriterium: (Alternierend)

Bei:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

Konvergenz, falls gilt:

1) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
2) $a_k \geq a_{k+1}$ für fast alle k

Quotientenkriterium: (^k)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

dann konvergent (absolut).

Wurzelkriterium: (versagt immer bei $\frac{n}{polynom \quad in \ n}$) (^k)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

< 1: konvergent (absolut)
>1: divergent
=1: nicht bestimmbar

$\boldsymbol{\frac{1}{k^s}}$**-kriterium:** (^zahl)

Bei:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+1}$$

Ausklammern

$$\frac{k\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)}$$

$$\frac{k}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} * \frac{1+\frac{1}{k}}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)}$$

Kürzen

$$\frac{1}{k^2\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} * \frac{1+\frac{1}{k}}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)}$$

⇨ s = 2

s>1: Konvergent
s≤1: Divergent

Kombinatorik

Permutationen:

Anzahl n verschiedener Elemente anzuordnen, d.h. ihnen eine Reihenfolge zu geben.

ohne Wiederholung

$$P(n) = n!$$

Bsp.: n = 3 Alle möglichen Anordnungen von {1, 2, 3}
Lösung: $P(3) = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$

mit Wiederholung

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

Bsp.: $n_1 = 2 \quad n_2 = 3$
Lösung: $P(n_1, n_2) = \frac{(2+3)!}{2! * 3!} = \frac{5!}{2!*3!} = 10$

Variationen:

Auswahl von n –Verschiedenen Objekten k auszuwählen wobei die Reihenfolge berücksichtigt wird.

ohne Wiederholung

$$\mathrm{V}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}} * (\mathrm{n}-\mathrm{k})! = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$$

Bsp.: n = 3 k = 2

Lösung: $V_2^3 * (3-2)! = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$

mit Wiederholung

$$V_k^{n,W} = n^k$$

Bsp.: n = 3 k=2 (z.B. einarmiger Bandit)

Lösung: $V_2^{3,W} = 3^2 = 9$

Kombinationen

Möglichkeiten der Auswahl von k Objekten aus n verschieden ohne die Berücksichtigung der Reihenfolge

ohne Wiederholung

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \text{"n über k" "}Binominalkoeffizent\text{"}$$

Bsp.: n=4 k=2

Lösung: $C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$

Anm.: Typisches Beispiel hierfür ist Lotto „6 aus 49“

mit Wiederholung

Auswahl von k Objekten aus n wobei Wiederholungen zugelassen sind die Reihenfolge ist dabei unerheblich

$$C_k^{n,W} = \binom{n+k-1}{k}$$

Bsp.: 6 Kugeln (alle gleich)auf 3 Urnen

Lösung: n = 3 k = 6

$$\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$$

Vollständige Induktion

1) n=1
2) $a_n = a_{n+1}$

Folgen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{1}$$

Exponent von e:

A_n = Unterm Bruchstrich
B_n = Exponent der Ausgangsfunktion

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}$$

$$1 \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Basisgrenzwerte:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) = 0$ für $s > 0$
$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[a]{a}\right) = 1$ für $a > 0$
$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$
$\lim_{n\to\infty}(g^n) = 0$ für $|g| < 1$
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^s}{a^n}\right) = 0$

$$x^m * x^n = x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$